CONTRACCION GRAVITATORIA DE UNA NUBE INTERESTELAR

Wolfgang G.L.Pöppel
(Departamento de Física de la Facultad de Ciencias
Exactas y Naturales de la Universidad de B.Aires)

El problema aquí considerado se refiere a la evolución de una nube interestelar bajo condiciones físicas muy simplificadas con vistas a su posterior contracción. El tratamiento del problema se hará considerando a la nube como un fluído que obedece a las ecuaciones hidrodinámicas y, luego de elegir condiciones iniciales adecuadas, se buscará su solución analítica.

La ecuación de movimiento de un fluído no homogéneo es, en una forma muy general (Landau-Lifshitz):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\zeta \frac{\partial v_e}{\partial x_e}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\eta\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_e}{\partial x_e}\right]\right) + F_i,$$

$$i = 1,2,3 \qquad (1)$$

En esta ecuación se usa la convención de Einstein sobre índices repetidos; ρ es la densidad, v la velocidad, p la presión, η y ζ los coeficientes de viscosidad de superficie y de volumen. Estas cinco variables dependen de la posición (x_1, x_2, x_3) y del tiempo t. $\vec{F}$ es la fuerza aplicada por unidad de volumen que actúa en el fluído. La (1) puede transformarse en una forma que hace más visible su carácter vectorial invariante. Resulta:

$$\rho\left\{\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{\text{grad}}\,\frac{v^2}{2} - \vec{v}\wedge \text{rot}\,\vec{v}\right\} - \left\{\eta\,(\vec{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{v} - \text{rot rot}\,\vec{v}) + \right.$$

$$\left. + \left[-\vec{\text{grad}}\,\eta \wedge \text{rot}\,\vec{v} + \vec{\text{grad}}\,(\vec{\text{grad}}\,\eta \times \vec{v}) - \left(\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\eta - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\eta\right)\right]\right\} +$$

$$+ \left\{\vec{\text{grad}}\,p\right\} + \left\{-\vec{\nabla}(\zeta\,\text{div}\,\vec{v}) - \vec{\nabla}\,\text{div}\,(\eta\vec{v}) + \text{div}\,\vec{v}\cdot\vec{\text{grad}}\,\eta + \right.$$

$$\left. + \frac{d}{dt}\vec{\nabla}\eta - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\eta + \frac{2}{3}\vec{\nabla}(\eta\,\text{div}\,\vec{v})\right\} = \vec{F}$$

Los símbolos $\wedge$ y $\times$ corresponden respectivamente a los productos vectorial y escalar. El significado de los diferentes términos es: la primera llave es simplemente $\rho \frac{d\vec{v}}{dt}$, la segunda llave corresponde a la acción de las fuerzas viscosas superficiales, la tercera llave al gradiente de presión, la cuarta llave a las fuerzas viscosas de volumen, y el segundo miembro a las fuerzas aplicadas. Para simplificar, tan sólo consideramos el caso en que el fluído adopta simetría esférica. En dicho caso, considerando al centro de la esfera como origen de coordenadas, la única variable espacial necesaria para describir el movimiento será la distancia r al centro de un elemento de volumen dado. Debido a la simetría esférica, las magnitudes vectoriales $\vec{F}$ y $\vec{v}$ tendrán dirección radial: $F(r,t)$ y $v(r,t)$. Las computaremos positivas hacia la periferia y negativas hacia el centro. Las demas variables tambien dependerán solamente de r y t.

Con todas estas condiciones y admitiendo que en el centro no haya masas puntuales, la ecuación (2) se puede reducir a:

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial p}{\partial r} + 2\alpha\frac{v}{r^2} - \alpha\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{2\alpha}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial \alpha}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial \alpha}{\partial r}\frac{v}{r} - 3\frac{v}{r}\frac{\partial \zeta}{\partial r} = F$$

con $\alpha = 4/3\ \eta + \zeta$

Esta ecuación presupone la no existencia de turbulencia, ni de ondas de choque. Además si la nube presentara una rotación inicial, ésta deberá ser suficientemente pequeña como para no perturbar la simetría esférica. Si ahora se acepta que la única fuerza presente es la gravitatoria de la misma nube (no existiendo entonces campos electromagnéticos o bien estando la nube en estado neutro, etc) podremos escribir:

$$F = -\frac{G\rho}{r^2}\int_0^r 4\pi\ r'^2\rho(r')\,dr' \qquad (4)$$

donde G es la constante de gravitación universal. Además de la ecuación de movimiento así planteada tenemos que considerar las ecuaciones de continuidad, de conservación de la energía y la ecuación de estado. La primera en este caso simplemente es:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v\right) \qquad (5)$$

En cuanto a la ecuación de conservación de la energía, ella nos dice que para un elemento de volumen

$$\Sigma\Delta A + \Sigma\Delta Q = \Delta U + \Delta E_c + \Delta E_{p\ int.} \tag{6}$$

donde $\Sigma\Delta A$ es la suma de todos los trabajos realizados sobre el elemento, en este caso el de las fuerzas aplicadas más el de las de presión (incluídas las de viscosidad). $\Sigma\Delta Q$ es la suma de todas las cantidades de calor entregadas al elemento, ya sea por conducción, por radiación o por posibles procesos nucleares; ΔU es el aumento de energía interna y $\Delta E_{p\ int.}$ el de energía potencial interna del elemento y que aquí es nulo. Aceptando que el fluido es químicamente homogéneo y que se comporta además como un gas ideal y aprovechando la ecuación de movimiento, la (6), referida a la unidad de volumen y de tiempo se reduce a

$$\operatorname{div} k\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T + \varepsilon_R\, \rho + E = C_v \frac{\rho}{\mu} \frac{dT}{dt} + \frac{d\, \rho u_R}{dt} \tag{7}$$

donde k es la conductividad térmica, C_v el calor específico a volumen constante, ε_R la energía térmica generada o recibida por procesos nucleares o de radiación, y u_R la energía interna específica de la radiación presente. El primer término representa el calor entregado por conducción, el segundo representa el calor entregado por radiación o por procesos nucleares y el tercero, E, (ver por ejemplo Kotshin, Kibel y Rose) es el proceso mecánico que no se transforma en energía cinética. El segundo miembro es por lo tanto el aumento de energía interna, suma del de un gas ideal y del de la radiación presente (μ es el peso molecular, T la temperatura). La expresión de E, llevada a coordenadas polares y con simetria esférica resulta ser:

$$E = \frac{4}{3}\eta \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)^2 + \zeta\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r}\right) - p\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r}\right) \tag{8}$$

El primer término del segundo miembro es el trabajo disipado por las fuerzas viscosas de superficie, el segundo el análogo disipado por las de volumen, (ambos son positivos), y el tercero el trabajo de compresión, que es de la forma $-p \frac{d\Delta V}{dt} \times \frac{1}{\Delta V}$, llamando ΔV al volumen del elemento.

Finalmente la ecuación de estado es:

$$p = \frac{R}{r} \rho T + p_r$$

que se compone de un término debido al gas y otro debido a la radiación. Si hay equilibrio termodinámico local $p_r \sim T^4$.

Está planteado así, con las ecuaciones (3),(5),(7) y (9), relacionadas con las (4) y (8) un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro variables dependientes: v, T, ρ y ϵ, y dos independientes: r y t. Fijadas las condiciones iniciales es necesario hallar la solución que da la evolución del sistema.

La tarea sería ahora hallar y discutir las soluciones analíticas correspondientes a diferentes casos particulares; pero previamente formularemos algunas hipótesis tendientes a simplificar las ecuaciones.

Supondremos que nuestro gas ideal es perfectamente transparente. De esta manera su absorción es nula y, si se halla en equilibrio termodinámico local, también su emisión será nula, de modo que $p_r = 0$, $\epsilon_R = 0$, $u_R = 0$. Nos quedan por estimar los parámetros k, η, ζ. Ello puede hacerse en base a la teoría cinética de los gases. Si nuestro gas ideal es monoatómico resulta (Enskog) que $\zeta = 0$, mientras que, en general (ver p.e. Jeans),

$$\eta \cong \frac{4}{3} b \sqrt{T} \qquad y \qquad k = d \sqrt{T}, \qquad b \text{ y } d \text{ constantes.}$$

Para el hidrógeno monoatómico neutro resulta:

$$\frac{4}{3} b \cong 0{,}27 \times 10^{-4} \frac{g}{cm\ seg (°K)^{\frac{1}{2}}} \quad y \quad d \cong 3{,}36 \times 10^{3} \frac{g\ cm}{seg^{3} (°K)^{3/2}}$$

Tenidas en cuenta todas las consideraciones anteriores y eliminando p, el sistema de ecuaciones se reduce al siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l}\rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}+v\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{R}{\mu}\dfrac{\partial \rho T}{\partial r}+2\dfrac{bv}{r^2}\sqrt{T}-b\sqrt{T}\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}-2b\dfrac{\sqrt{T}}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{b}{2\sqrt{T}}\dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{b}{2\sqrt{T}}\dfrac{\partial T}{\partial r}\dfrac{v}{r}= \\ -\dfrac{G\rho}{r^2}\displaystyle\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')\,dr \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (10) \\ -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v\right) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (11) \\ b\sqrt{T}\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{v}{r}\right)^2-\dfrac{RT\rho}{\mu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v\right)+\dfrac{d}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sqrt{T}\dfrac{\partial T}{\partial r}\right)=c_v\dfrac{\rho}{\mu}\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}+v\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) \quad (12)\end{array}\right.$$

Se trata de plantear condiciones iniciales plausibles para proceder luego a la resolución. Por un lado se han hecho hipótesis demasiado simplificadoras quizas, que ignoran la extrema complejidad de las nubes interestelares reales como ser: zonas ionizadas, turbulencia. ondas de choque, campos gravitatorios exteriores, presión de radiación,etc. las cuales además en general atentan contra la simetría esférica. Pero por el otro lado existen sistemas de gran simetría esférica, como ser los cúmulos globulares y las galaxias elípticas de poca excentricidad. Los primeros parecen pertenecer evidentemente a los objetos más antiguos de nuestra galaxia y que actualmente no se forman más, de manera que podríamos aventurarnos a tratar la evolución de una nube de "primera generación" con vistas a obtener un cúmulo globular, ya que en este caso parecerían más aceptables algunas de las hipótesis hechas, como por ejemplo lo simple de la composición química elegida (hidrógeno puro), la ausencia de campo de radiación, la no consideración de la rotación diferencial de la galaxia, etc. Por todo lo dicho adoptaremos entonces las condiciones iniciales más simples:

$$\rho\,(0,r) = \rho_0 = \text{Cte.}, \qquad T(r,0) = T_0 = \text{Cte.}, \qquad v(r,0) = 0 \qquad (13)$$

Debemos hacer notar sin embargo que la última condición $v_0 = 0$ es poco satisfactoria, ya que postula un "instante privilegiado" en el cual la nube parte del reposo sin estar no obstante en equilibrio,ya que las fuerzas actuantes no son nulas. Consideremos ahora la solución del problema. Las condiciones (13) permiten despreciar en primera aproximación en todas nuestras ecuaciones los términos en que figuren $\frac{\partial T}{\partial r}$, $\frac{\partial \rho}{\partial r}$, $v \frac{\partial v}{\partial r}$ y demás términos de segundo orden en v. Con esto presente, derivando la (11) respecto de r y reemplazando en (10) se obtiene:

$$\rho \frac{\partial r}{\partial t} \cong -\frac{4}{3} \pi G \rho^2 r, \tag{14}$$

Esta ecuación simplemente nos dice que a velocidades pequeñas las fuerzas viscosas carecen de importancia por lo que, como inicialmente no había gradiente de presión ($\frac{\partial \rho}{\partial r} = 0 = \frac{\partial T}{\partial r}$), la única fuerza importante es la gravitatoria. Derivando la (14) respecto de t y combinándola con la (11) resulta

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) = 0, \tag{15}$$

ecuación en la cual v es la única variable dependiente. Ensayando v como producto de dos funciones, una de r y otra de t:

$$v = A(t)F(r)$$

resulta, luego de cálculos y consideraciones que no reproduciremos aquí:

$$v = -\frac{2}{3} \omega\, r \operatorname{tg} (\omega t), \tag{16}$$

donde ω es una constante que vale

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} \times \frac{1}{4} \qquad \text{con} \qquad \tau = (\pi/8G\rho_0)^{\frac{1}{2}} \tag{17}$$

Ahora puede hallarse ρ mediante la (14) resultando

$$\rho = \rho_0 \frac{1}{\cos^2 \omega t}, \tag{18}$$

y, finalmente, para hallar T se usa la (12) que aún no se había utilizado, obteniéndose simplemente la ecuación de la adiabática reversible:

$$T = T_0 (\rho/\rho_0)^{\gamma - 1} \tag{19}$$

donde γ es la relación c_p/c_v de los calores específicos.

Se encuentra así una solución aproximada del problema planteado. Por sustitución puede verificarse que esta solución es más exacta de lo que parecería, por la manera en que fué hallada, ya que satisface exactamente las (11) y (12), mientras que lo hace con la (13) despreciando solamente el término no lineal en v, es decir, suponiendo que

$$v \frac{\partial v}{\partial r} \ll \frac{v}{t} \tag{20}$$

condición suficiente que puede servir de criterio de validez de la solución. Por otra parte la solución sólo tiene validez en r hasta un valor R(t) radio instantáneo de la nube. Dicho valor se obtiene recordando que para r = R la masa encerrada por dicho radio es la de la nube:

$$\frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \tag{21}$$

donde R_0 es el radio inicial de la nube. De (21) y (18) resulta:

$$R(t) = R_0 \cos^{2/3} \omega t \tag{22}$$

Hagamos ahora algunas consideraciones físicas sobre la solución. La velocidad resulta en cada instante una función lineal de la distancia al centro. Además crece monótonamente con el tiempo (como puede comprobarse calculando $\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r}$) terminando por alcanzar un valor infinito luego de un tiempo $t = \tau$. En realidad ya mucho antes de que esto suceda nuestra solución deja de tener validez por dejarse de cumplir la ecuación (20) como tamción por otras razones físicas que analizaremos al tratar una segunda solución particular. En cuanto a la densidad y temperatura, ambas inicialmente uniformes en el espacio, siguen siéndolo en todo instante aunque crezcan monótonamente con el tiempo hasta llegar a una densidad y a una temperatura infinitamente elevadas en el instante $t = \tau$ El hecho de que se cumpla la adiabática reversible se debe a que al no haber gradiante de temperatura presente, no hay conducción térmica, y por otra parte tampoco hay disipación viscosa, ya que el primer término de la ec.(12) es nulo. Físicamente esto se debe a que al variar depende la velocidad linealmente del radio,la nube se va contrayendo moviéndose por capas esféricas concéntricas que no tienen roza—

miento mútuo. Al no haber entónces calor entregado se cumple la ecuación de la adiabática. En definitiva, si para tener una idea del comportamiento de la nube se extrapola la solución aproximada hallada más allá de lo permitido por la (20), resulta que la nube se condensa en un tiempo $\tau \sim (G\rho_0)^{-1/2}$ independiente de la masa (o radio) y de la temperatura inicial de la nube y dependiente solo de su densidad inicial y de la constante gravitatoria. Este es un resultado conocido (ver por ejemplo Burbidge y Burbidge)

Examinada, como introducción, esta solución aproximada, veamos ahora una solución analítica exacta. El hecho de que la velocidad se distribuya en forma lineal con la distancia nos induce a elegir las siguientes condiciones iniciales "más estéticas" que aquellas que imponen el reposo inicial de la nube:

$$\rho(0,r) = \rho_0 = \text{Cte.}, \quad T(0,r) = T_0 = \text{Cte.} \quad v(0,r) = A_0 r \tag{23}$$

donde A_0 es una constante negativa, vale decir que, en este caso, la nube tiene ya una velocidad inicial distribuída linealmente con el radio

Despreciando ahora como primera aproximación los términos en $\frac{\partial v}{\partial r}$ y $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ y con procedimientos análogos a los seguidos para hallar la solución anterior, se llega a la ecuación en v más completa que la (15) pues no se desprecia ahora a los que antes eran términos de segundo orden en v:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial t}\left(2\frac{\partial v}{\partial r} + 2\frac{v}{r}\right) + 2\frac{v^2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial t} + v\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 = 0 \tag{24}$$

Nuevamente ensayamos $v = A(t)F(r)$ y tras cálculos y consideraciones que no podemos reproducir aquí, se llega a calcular v, pudiéndose luego calcular ρ y T en forma parecida al caso anterior. El resultado es:

$$v = -\frac{2}{3}\, r\, \frac{1}{\tau' - t}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{(1-t/\tau')^2}, \quad T = T_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \tag{25}$$

donde

$$\tau' = (6\pi G\rho_0)^{-1/2} \quad \text{y} \quad 0 \le t \le \tau$$

Un hecho notable de esta solución es que, a pesar de la forma en que fué obtenida es <u>la solución exacta</u> del sistema (10),(11) y (12) con las condiciones iniciales (23) como puede comprobarse por sustitución directa.Teniendo esto presente, discutamos físicamente esta solución que es cualitativamente muy parecida a la solución aproximada considerada antes. Nuevamente la velocidad varía linealmente con el radio y crece monótonamente con el tiempo (en valor absoluto) durante todo el proceso de contracción. La densidad y temperatura se mantienen uniformes espacialmente a lo largo de todo el proceso, creciendo monótonamente en el tiempo. Por idéntica razón a la anterior vuelve a cumplirse la adiabática y las tres variables v, T, ρ vuelven a tomar valores ilimitados luego de un tiempo finito $\tau' \sim (G\,\rho_0)^{-\frac{1}{2}}$ durante el cual la nube se "contrae infinitamente". La dependencia del radio de la nube en función del tiempo es ahora

$$R = R_0\left(1 - \frac{t}{\tau'}\right)^{2/3} \tag{26}$$

Otra vez el tiempo de contracción τ' de la nube resulta ser independiente de su masa y de su temperatura inicial. Es necesario hacer notar que tampoco esta solución, a pesar de ser exacta, y aún suponiendo esencialmente exactas las condiciones iniciales, la prescindencia de turbulencia, etc., puede aspirar a describir el proceso de contracción en toda su extensión. La razón es que la solución deja de tener significado físico cuando el sistema formado por las ec.(10), (11) y (12) deja de dar una descripción suficientemente aproximada del problema. Por ejemplo, a temperaturas suficientemente altas como para que el gas esté apreciablemente ionizado (para el hidrógeno unos 10000° K), y si hubiere campos magnéticos, habrá que completar las ecuaciones con términos que comprendan las fuerzas magnéticas, energías de ionización, presión de radiación, etc. A su vez es menester que la temperatura inicial no sea tan baja como para que no puedan aplicarse las ecuaciones del gas ideal, constancia de γ etc. Sin embargo, una solución como la hallada podría aspirar a describir una primera etapa de la contracción de la nube. Dicha etapa tendría una duración muy cercana a τ' ya que la evolución del proceso es muy lenta al principio, produciéndose recién en su última parte cambios notables de las dimensiones físicas.

Mencionemos todavía el problema de la obtención de un mecanismo de fraccionamiento de la nube para dar lugar a subsistemas. Si bien en el rango de validez de nuestra solución exacta dicho fraccionamiento todavía no se produce, en una etapa más avanzada del proceso en la que, por la elevada temperatura alcanzada, las (10), (11) y (12) deben ser completadas con términos radioactivos y en la cual cabe esperar que se rompa la isotermia espacial, dicho fraccionamiento podría producirse. Naturalmente, mientras no se abandone la simetría esférica, no puede aspirarse más que a obtener un fraccionamiento por capas esféricas, las cuales luego evolucionarían separadamente. Pero antes de tratar esto sería necesario resolver, siquiera numéricamente, el nuevo sistema de ecuaciones obtenidas de las (10), (11) y(12) con las modificaciones mencionadas.

Finalmente para fijar ideas, daremos algunos valores numéricos para el caso de la solución exacta. Si partiéramos por ejemplo de hidrógeno puro, ($\gamma = 1,66$), con $\rho_0 = 10^{-24}$ el tiempo de contracción sería

$$\tau' \cong 2,9 \times 10^7 \text{ años},$$

si fijamos una masa de $M = 10^5 M_{\odot}$, lo cual equivale a $R_0 = 120$ psc. resulta para la velocidad inicial máxima (en la periferia) $v(0,R) = -2,65$ Km/seg. Por otra parte, el tiempo t necesario para que ρ_0 aumente en un 10%, sería $t = 0,17\tau'$ y correspondería a un incremento del 7% de T_0. O sea, como quedara dicho, el proceso es de lenta evolución al principio.

El autor desea expresar su agradecimiento al Prof. C.M.Varsavsky por haberlo dirigido y asesorado durante la realización de este trabajo.

Bibliografía:

Landau-Lifshitz: Fluid mechanics (trad.del ruso).
Enskog: Diss. Uppsala 1917.
Burbidge-Burbidge: Stellar Evolution, Handb.der Phys.,LI,1958.
Kotshin-Kibel-Rose: Theoretische Hydromechanik (trad.del ruso).

Summary:

GRAVITATIONAL CONTRACTION OF AN INTERSTELLAR CLOUD

An interstellar neutral gas cloud of spherical symmetry is considered. The general hydrodinamical equations are written without considering turbulence or shock waves. Because of the observational difficulty of fixing the initial conditions for the cloud, the most simple are chosen: initial uniform density, temperature and velocity. For such cases analytical solutions are found which indicate that the cloud contracts in a time $\sim (G \rho_o)^{-\frac{1}{2}}$ independent of mass and initial temperature. Some further considerations are maken.